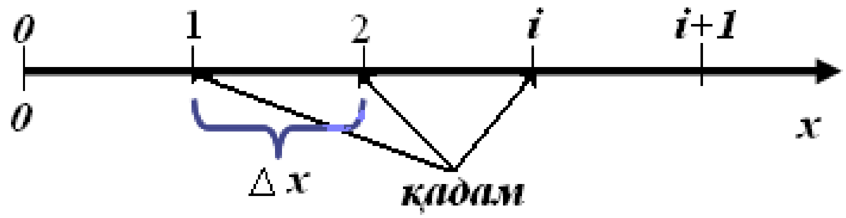
Жылуэнергетикасындағы сандық әдістер

Лекция 2

Шекті-айырымды схемаларды құрудың принциптері. Негізгі түсініктері мен белгілеулері. Дифференциалдық теңдеулерді шекті айырымдармен бейнелеу әдістері . Тейлор қатарына жіктеу әдісі

Лектор: Оспанова Ш.С., PhD, аға оқытушы

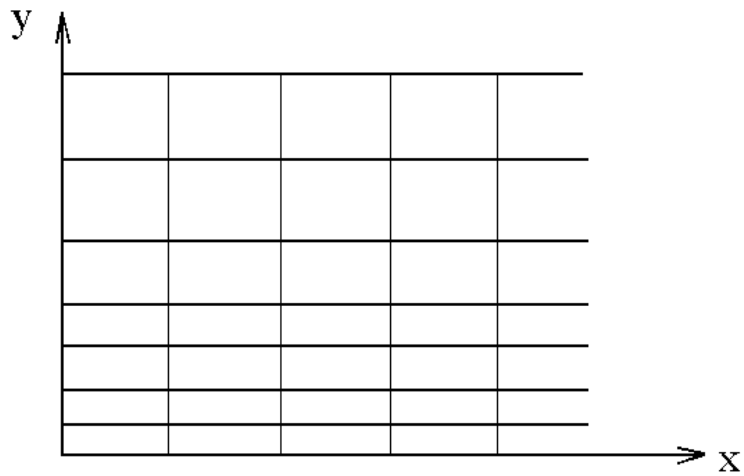
Шекті айырымдар әдісінің негізгі түсінігі мынада. Ортаның күйі үздіксіз аргументі бар *f* функциясының өзгерісінің дифференциалық теңдеуімен сипатталсын. Аргументтің үздіксіз өзгеру облысы нүктелердің шекті санымен (*түйіндермен*) алмастырылсын. Түйіндер арасындағы қашықтық *қадам* деп аталады (1–сурет).



1–сурет

Түйіндердің жиынтығы *торды* береді, ал тордың өзі *біртекті* немесе *біртексіз* болады.
Егер *f* функциясы бір ғана айнымалығы тәуелді болса, онда тор бірөлшемді деп аталады, егер *f* бірнеше айнымалылардың функциясы болса, онда тор көпөлшемді деп аталады.

Шекті-айырымды тор бір ғана айнымалы бойынша біртекті, ал екінші айнымалы бойынша біртексіз болуы мүмкін. Мысалы, 1-суретте *x* бойынша біртекті және *y* бойынша біртексіз тор бейнеленген.



2-сурет. Шекті–айырымды тор

Шекті–айырымды тордың көптеген түйіндерінде анықталған функция *тор функциясы* f_{Δ} деп аталады. Дифференциалдық теңдеудің құрамына енетін туындылар сәйкес жуықталған алгебралық қатынастармен немесе *шекті-айырымды аналогтармен* алмастырылады (*аппроксимацияланады*).

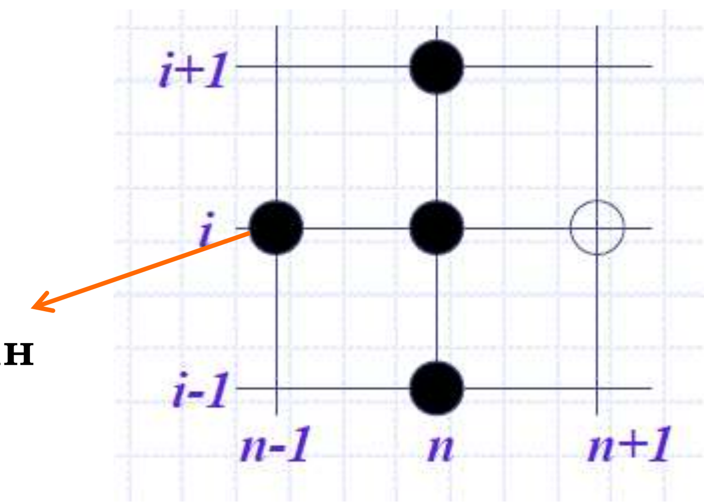
Шекті-айырымды схема *дегеніміз - сәйкес шекаралық шарттары бар дифференциалдық теңдеуді аппроксимациялайтын дискретті алгебралық теңдеулер жүйесі.*
Дифференциалдық теңдеудің жуық шешімі ретінде сәйкес айырымды теңдеудің шешімі – бір немесе көпөлшемді кесте түріндегі тор функциясы болады.

Шекті–айырымды схеманы құрастыру барысында қолданылатын тор түйіндерінің жиынтығы ***шаблон*** *деп аталады.*

x → *i*

y → j

t → n



Түйін

Тейлор қатарына жіктеу әдісі

f(x) функциясын x_i нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктейік:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_i (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i (x_{i+1} - x_i)^2 + $$

$$+ \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i (x_{i+1} - x_i)^3 + ЖРМ, \qquad (1)$$

мұндағы ЖРМ – жоғары ретті мүшелер деп аталады

Ықшамдау үшін төмендегідей белгілеулер енгіземіз:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \quad f_{i+1} = f(x_{i+1}), \quad f_i = f(x_i), \quad f_{i-1} = f(x_{i-1}).$$

(1) өрнекті жаңа белгілеулер арқылы жазайық:

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + ЖРМ \qquad (2)$$

Барлық жоғары ретті мүшелерді былайша белгілеп алайық:

$$O(\Delta x^2) = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + ЖРМ$$

онда (2) өрнек мынадай түрге ие болады:

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + O(\Delta x^2)$$

Мұндағы $O(\Delta x^2)$ белгілеуі келесі қосылғыштардың ең кіші реті екіге тең екендігін білдіреді; қалған қосылғыштардың реті жоғары болады. Осы жерден i нүктесіндегі бірінші туындыны табайық:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

Бұл өрнек ***«алға»*** *шекті–айырымды қатынасы* немесе бірінші туындының *оң жақты шекті-айырымды аппроксимациясы* деп аталады.

Туынды үшін шекті-айырымды өрнекті алу үшін *f(x)* функциясын x_{i-1} нүктесінде Тейлор қатарына жіктеуге болады:

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \ldots. \qquad (1)$$

$$f_{i-1} - f_i = -\left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i}_{\text{ЖРМ}} \Delta x^3 + \ldots. \qquad (2)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

Бұл өрнек ***«артқа»*** *шекті–айырымды қатынасы* немесе бірінші туындының ***сол жақты*** *шекті-айырымды аппроксимациясы* деп аталады

БІРІНШІ РЕТТІ ТУЫНДЫ ҮШІН ОРТАЛЫҚ ШЕКТІ-АЙЫРЫМДЫ ҚАТЫНАСТЫ ҚОРЫТУ

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \ldots \qquad (1)$$

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \ldots. \qquad (2)$$

Ол үшін (1) өрнегінен (2) өрнекті мүшелеп алып тастаймыз:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \underbrace{\frac{1}{3}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \ldots}_{\text{ЖРМ}}$$

Осы жерден туындыны анықтаймыз:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\frac{df}{dx}\bigg|_i \Delta x + \underbrace{\frac{1}{3}\frac{d^3 f}{dx^3}\bigg|_i \Delta x^3 + \ldots}_{\text{ЖРМ}}$$

$$\frac{df}{dx}\bigg|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

Бұл өрнек ***орталық*** *шекті-айырымды қатынас* деп аталады.
екінші *ретті дәлдікке ие*,

Осылайша, бірінші туынды үшін біз үш түрлі жуықталған өрнектерді алдық. Бір қарағанда аталған үш теңдеудің бір-бірінен айырмашылығы жоқ сияқты көрінгенімен, шын мәнінде i нүктесінде олар бірінші туынды үшін бірнеше есеге дейін айырмашылығы бар мәндерді беруі мүмкін. Ең дәл мәндерді орталық шекті-айырымды қатынас береді, өйткені, оның дәлдігінің реті жоғары. Дегенмен де ол әрқашанда жақсы нәтиже бере бермейді, тіпті, кейде шекті-айырымды схеманың орнықсыздығына алып келуі мүмкін.

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$ Алға ШАС

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i-1} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$ артқа ШАС

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$ орталық ШАС

ЕСЕПТІК МЫСАЛДАР

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y}$$

Берілген туындыны дәлелдеу керек

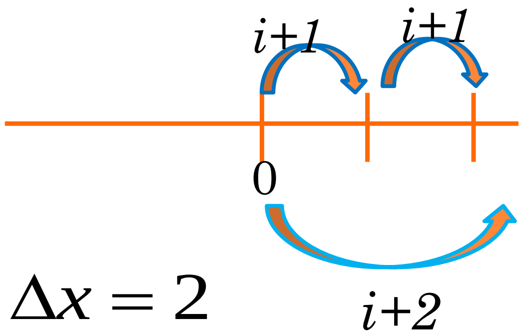
$$f_{j+1} = f_j + \left.\frac{df}{dy}\right|_j \Delta y + \underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dy^2}\right|_j \Delta y^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dy^3}\right|_j \Delta y^3 + \ldots}_{\text{ЖРМ}}$$

$$f_{j+1} - f_j = \left.\frac{df}{dy}\right|_j \Delta y \Rightarrow \left.\frac{df}{dy}\right|_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta y}$$

МЫСАЛ

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+2} = ?$$

Яғни қадамы 2 болғанда



$$\Delta x = 2$$

$$f_{i+2} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \cdot 2\Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \cdot (2\Delta x)^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \cdot (2\Delta x)^3 + \ldots \quad (1)$$

$$f_{i+2} = f_i + 2\left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + 4\cdot\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \cdot \Delta x^2 + 8\cdot\frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \cdot \Delta x^3 + \ldots \quad (2)$$

$$f_{i+2} = f_i + 2\left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + 2\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \cdot \Delta x^2 + \frac{4}{3}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \cdot \Delta x^3 + \ldots \quad (3)$$

$$f_{i+2} - f_i = 2\left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{i+2} = \frac{f_{i+2} - f_i}{2\Delta x}$$